**BI-SPOL-15 Predikátová logika: jazyk, interpretace, splnitelnost formulí, logická platnost, logická ekvivalence a důsledek, teorie, model.**

BI-MLO

**Jazyk predikátové logiky**

**Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky**

**Konstanty** – označují konkrétní objekty. Zapisujeme je většinou velkými tiskacími písmeny, ale i jinak, třeba číslovkou.

**Proměnné** – označují libovolné objekty. Popisují se většinou, malými písmeny z konce abecedy.

**Predikáty** – vlastnosti, které náleží jednotlivým objektům. U predikátů je dána jejich četnost, tj. kolika objektů se týkají. Např. m(x) – unární, r(x,y) – binární. Vrací ANO (1) nebo NE (0).

**Funkce** – předpisy, jak přiřadit jednomu či více objektům další objekt. Je též dána jejich četnost. Př. f(x,y) = x+y je binární funkce.

**Kvantifikátory** – jsou dva. Obecný (zobecnění konjunkce) a existenční (zobecnění disjunkce).

Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky

Logické symboly jsou univerzální pro všechny jazyky, proto se jazyk definuje jako množina

mimologických symbolů: L = {K, ..., p, ..., f, ...}. (K = konstanty, p = predikáty, f = funkce)

(Mimologické zavádíme do jazyka podle potřeby.)

**Term**

Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky

**Formule**

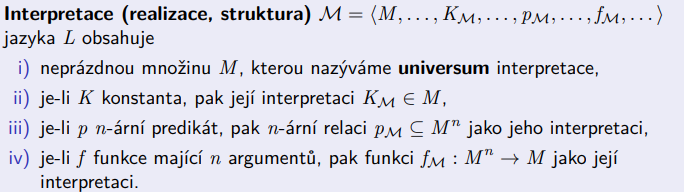
Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky

**Interpretace jazyka**

* Specifikujeme jazyk, přiřazujeme p a f nějaký význam
* Každý jazyk je pouze obecná formalizace prvků a pravidel, jenž platí v jazyce. Může nabývat různých interpretací.





* Prvky universa nazýváme individua

Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automatickyObsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky

Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky

**Formalizační strom**

Predikátová logika narozdíl od výrokové počítá s proměnnými.

Pravdivost formulí záleží na proměnných, jež jsou vybrány z množiny, a jakým způsobem je

interpretujeme.

Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky

### Splnitelnost formulí

Splnitelné formule jsou takové formule, které v nějaké interpretaci daného jazyka vyhodnoceny jako pravdivé pro nějaké ohodnocení e.

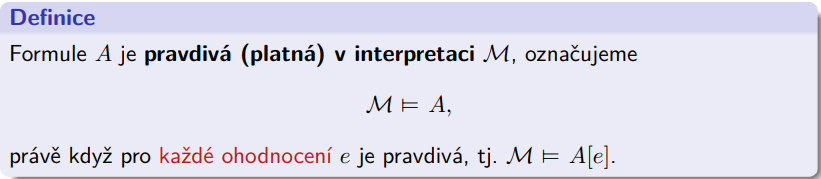
**Ohodnocení proměnných  
Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky**

**Pravdivost v interpretaci při ohodnocení**Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky**Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky**

****

**Splnitelné formule, kontradikce**

Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky

Obsah obrázku stůl

Popis byl vytvořen automaticky

Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky

### Logická platnost (pravdivost)

* Podobné jako tautologie ve výrokové logice.
* Jsou to formule pravdivé ve všech interpretacích
* Příklady na straně 112
* Chceme-li dokázat, že se jedná o logicky pravdivou formuli, budeme často postupovat sporem. Pokud by formule nebyla logicky pravdivá, pak by existovala interpretace a ohodnocení, pro něž by formule nebyla pravdivá a byla by pravdivá negace této formule. Rozebereme ji podle Tarského definice pravdy. Pokud dojdeme ke sporu, nemohla taková situace nastat, a jedná se tedy o logicky pravdivou formuli.

Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky

Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky

Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky

Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky

Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky

Formule je **platná (pravdivá) v interpretaci** – pro každé ohodnocení platí M |= A

Formule je **splnitelná v interpretaci** – pro nějaké ohodnocení e platí M |= A[e]

Formule je **kontradikce v interpretaci** – není splnitelná

### Logická ekvivalence a logický důsledek

* Strana 116
* A[e] - označení hodnoty formule při ohodnocení *e* v interpretaci *M*

Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky

Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky

Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky

Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky

Opakování

Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky

### Sémantické stromy

* Strana 121
* Slouží ke zjištění pravdivosti formule v konkrétní interpretaci při konkrétním ohodnocení (je-li formule uzavřená, ohodnocení není důležité)
* Slouží pro ověření logického důsledku
* Spojky jako ve výrokové logice

**Konstrukce**

Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky

Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky

Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky

**Myšlenkový obrat**

Obsah obrázku text, osoba, snímek obrazovky

Popis byl vytvořen automaticky

Je formule A logicky platná? – znegujeme formuli – pokud vyjde ve stromu kontradikce – je to logicky platná formule (došli jsme ke sporu, že existuje interpretace M a ohodnoceni e, v němž tato formule není pravdivá)

Je B logickým důsledkem A? – pravou stranu přidáme na levou pomocí konjunkce a negace pravé strany – pokud vyjde kontradikce jedná se o logický důsledek

* A |= B …. A ∧ ¬B je kontradikce?

Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky

Obsah obrázku stůl

Popis byl vytvořen automaticky

### Prenexní normální tvar

* Něco jako DNT a KNT ve výrokové logice

### Teorie a model

* Teorie je množina uzavřených formulí
* Model teorie je taková interpretace, ve které všechny formule z teorie platí

Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky

Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky

**Teorie ekvivalence**

Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky

* Př. M = množina všech přímek v rovině, r(x, y) znamená x || y, tj. x je rovnoběžná s y
  + Ekvivalence znamená axiomy výše – x je rovnoběžná s x, atd.
* Další příklady na straně 150

Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky

Př. faktorizace

Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky

* **Třídy ekvivalence**

Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky

* K čemu to je?

**Teorie rovnosti**

* Speciální případ ekvivalence – platí pro ni navíc další dva axiomy.

Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky

* Příklad 152

**Teorie částečného ostrého uspořádání**

**Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky**

**Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky**

**Teorie částečného neostrého uspořádání**

**Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky**

**Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky**

**Teorie lineárního uspořádání**

* Jedná se o uspořádání všech prvků dané množiny do jedné linie

**Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky**

**Teorie hustého lineárního uspořádání**

**Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky**

**Teorie neomezeného hustého lineárního uspořádání**

**Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky**

**Teorie grup**

**Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky**

* Aditivní modely teorie grup

**Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky**

* Multiplikativní modely teorie grup

**Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky**

### Otázky a odpovědi

1. Jak určit, které formule jsou splnitelné, a které jsou v důsledku toho logicky pravdivé a kdy se jedná o logický důsledek?
   1. Pomocí logicky ekvivalentních úprav – ne vždy umíme provést
   2. Pomocí sémantických stromů
   3. Pomocí rezoluční metody – neumím
2. Jak zjistit, že jedna formule je logickým důsledkem té druhé, jak k tomu lze využít důkaz sporem a předvést na netriviálním příkladu.  
   Pro ověření logického důsledku můžeme použít sémantický strom. U toho použijeme důkaz sporem a ptáme se, zda-li je negace pravdivá. Když jsou všechny větve kontradikce, tak toto neplatí a formule je logickým důsledkem.!  
   př. viz. v textu
3. Uvést příklady formulí, které jsou pravdivé v a) interpretaci a ohodnocení, b) interpretaci, c) logicky pravdivé jen za použití predikátů (např. p(x) || !p(x))
   1. Obsah obrázku text

      Popis byl vytvořen automaticky
   2. Obsah obrázku text

      Popis byl vytvořen automaticky
   3. Obsah obrázku text

      Popis byl vytvořen automaticky
4. V interpretaci jazyka známé jako přirozená čísla definujte predikáty p(x) a s(x) s významem x je prvočíslo a x je sudé
5. Jak rozhodovat o logické ekvivalenci a logickém důsledku? + příklad  
   sémantický strom – A |= B … A ∧ ¬B  
   ekvivalence je důsledek na obě strany
6. Jak rozhodovat o splnitelnosti formule? + příklad  
   splnitelnost – pro alespoň jedno ohodnocení platí
7. Jak rozhodovat o log. pravdivosti? + příklad  
   pomocí sémantického stromu – znegujeme formuli – pokud je na všech větvích kontradikce, tak je to pravdivé
8. **Co je otevřená a uzavřená formule?  
   Obsah obrázku text

   Popis byl vytvořen automaticky**

**Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky**

**Proměnná je volná ve formuli A, právě když zde má pouze volný výskyt**

**Proměnná je vázaná ve formuli A, právě když zde má pouze vázaný výskyt**

1. **Co všechno znamená symbol |= ?**
   1. M |= A – A je pravdivá v interpretaci M
   2. B |= A – A je logickým důsledkem B
   3. M |= T – M je modelem T
   4. T |= A – A je logickým důsledkem T
2. Jak si mám představit ohodnocení e - příklad?

Obsah obrázku text

Popis byl vytvořen automaticky

1. Je formule logicky pravdivá? Dokažte nebo uveďte protipříklad  
   Obsah obrázku text

   Popis byl vytvořen automaticky  
   - nebo můžeme použít sémantický strom – negace formule – pokud je na všech větvích kontradikce tak je log. pravdivá, protože neexistuje ohodnocení a interpretace, kde by neplatila
2. K čemu se používají teorie a modely?